TĐP 02: ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng (d): $2x-y-5=0$ và đường tròn (C'): $x^2+y^2-20x+50=0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, C(1; 1).

• *A(3; 1), B(5; 5) ⇒ (C):* $x^2+y^2-4x-8y+10=0$

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, A(2; –3), B(3; –2), trọng tâm của ΔABC nằm trên đường thẳng $d: 3x-y-8=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

• *Tìm được* $C_1(1;-1)$, $C_2(-2;-10)$.

+ *Với* $C_1(1;-1)$ ⇒ *(C):* $x^2+y^2-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}y+\frac{16}{3}=0$

+ *Với* $C_2(-2;-10)$ ⇒ *(C):* $x^2+y^2-\frac{91}{3}x+\frac{91}{3}y+\frac{416}{3}=0$

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho ba đường thẳng: $d_1: 2x+y-3=0$, $d_2: 3x+4y+5=0$, $d_3: 4x+3y+2=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d_1 và tiếp xúc với d_2 và d_3.

• *Gọi tâm đường tròn là* $I(t;3-2t) \in d_1$.

Khi đó: $d(I,d_2)=d(I,d_3) \Leftrightarrow \frac{|3t+4(3-2t)+5|}{5}=\frac{|4t+3(3-2t)+2|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=4 \end{array}\right.$

Vậy có 2 đường tròn thoả mãn: $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{49}{25}$ *và* $(x-4)^2+(y+5)^2=\frac{9}{25}$.

<u>Câu hỏi tương tự:</u>

a) Với $d_1: x-6y-10=0$, $d_2: 3x+4y+5=0$, $d_3: 4x-3y-5=0$.

ĐS: $(x-10)^2+y^2=49$ *hoặc* $\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta': 3x-4y+10=0$ và điểm *A*(–2; 1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng *Δ*, đi qua điểm *A* và tiếp xúc với đường thẳng Δ′.

• *Giả sử tâm* $I(-3t-8;t) \in \Delta$.. *Ta có:* $d(I,\Delta')=IA$

$\Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2} \Leftrightarrow t=-3 \Rightarrow I(1;-3),\ R=5$

PT đường tròn cần tìm: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho hai đường thẳng $\Delta: 4x-3y+3=0$ và $\Delta': 3x-4y-31=0$. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm có tung độ bằng 9 và tiếp xúc với Δ'. Tìm tọa độ tiếp điểm của (C) và Δ'.

• *Gọi* $I(a;b)$ *là tâm của đường tròn (C).* (C) *tiếp xúc với* Δ *tại điểm* $M(6;9)$ *và* (C) *tiếp xúc với* Δ' *nên*

$\begin{cases} d(I,\Delta)=d(I,\Delta') \\ \overrightarrow{IM}\perp \vec{u}_{\Delta}=(3;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|4a-3b+3|}{5}=\dfrac{|3a-4b-31|}{5} \\ 3(a-6)+4(b-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|4a-3\dfrac{54-3a}{4}+3\right|=|6a-85| \\ 3a+4b=54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |25a-150|=4|6a-85| \\ b=\dfrac{54-3a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=10;\ b=6 \\ a=-190;\ b=156 \end{array}\right.$

Vậy: $(C):(x-10)^2+(y-6)^2=25$ *tiếp xúc với* Δ' *tại* $N(13;2)$

hoặc $(C):(x+190)^2+(y-156)^2=60025$ *tiếp xúc với* Δ' *tại* $N(-43;-40)$

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với các trục toạ độ.

• *Phương trình đường tròn có dạng:* $\left[\begin{array}{l} (x-a)^2+(y+a)^2=a^2\ (a) \\ (x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (b) \end{array}\right.$

a) $\Rightarrow a=1;\ a=5$ *b)* $\Rightarrow$ *vô nghiệm.*

Kết luận: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ *và* $(x-5)^2+(y+5)^2=25$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $(d):2x-y-4=0$. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng (*d*).

• *Gọi* $I(m;2m-4)\in(d)$ *là tâm đường tròn cần tìm. Ta có:* $|m|=|2m-4| \Leftrightarrow m=4, m=\dfrac{4}{3}$.

• $m=\dfrac{4}{3}$ *thì phương trình đường tròn là:* $\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$.

• $m=4$ *thì phương trình đường tròn là:* $(x-4)^2+(y-4)^2=16$.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(–1;1) và B(3;3), đường thẳng (Δ): $3x-4y+8=0$. Lập phương trình đường tròn qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng (Δ).

• *Tâm I của đường tròn nằm trên đường trung trực d của đoạn AB*

d qua M(1; 2) có VTPT là $\overrightarrow{AB}=(4;2) \Rightarrow$ *d: 2x + y – 4 = 0* $\Rightarrow$ *Tâm I(a;4 – 2a)*

Ta có IA = d(I,D) $\Leftrightarrow |11a-8|=5\sqrt{5a^2-10a+10} \Leftrightarrow 2a^2-37a+93=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\dfrac{31}{2} \end{array}\right.$

• *Với a = 3* $\Rightarrow$ *I(3;–2), R = 5* $\Rightarrow$ *(C):* $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

• *Với* $a=\dfrac{31}{2} \Rightarrow I\left(\dfrac{31}{2};-27\right), R=\dfrac{65}{2} \Rightarrow (C): \left(x-\dfrac{31}{2}\right)^2+(y+27)^2=\dfrac{4225}{4}$

Câu 9. Trong hệ toạ độ *Oxy* cho hai đường thẳng $d:x+2y-3=0$ và $\Delta:x+3y-5=0$. Lập phương trình đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ.

• *Tâm* $I\in d \Rightarrow I(-2a+3;a)$. *(C) tiếp xúc với* Δ *nên:*

$d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|a-2|}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ *(C):* $(x+9)^2+(y-6)^2=\frac{8}{5}$ *hoặc (C):* $(x-7)^2+(y+2)^2=\frac{8}{5}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (C′), bán kính R′ = 2 và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

• *(C) có tâm* $I(-2\sqrt{3};0)$, *bán kính R= 4; A(0; 2). Gọi I′ là tâm của (C′).*

PT đường thẳng IA : $\begin{cases} x=2\sqrt{3}t \\ y=2t+2 \end{cases}$, $I'\in IA \Rightarrow I'(2\sqrt{3}t;2t+2)$.

$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{I'A} \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow I'(\sqrt{3};3) \Rightarrow$ *(C′):* $(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2=4$

Câu 11. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4y-5=0$. Hãy viết phương trình đường tròn (C′) đối xứng với đường tròn (C) qua điểm M$\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$

• *(C) có tâm I(0;2), bán kính R = 3. Gọi I’ là điểm đối xứng của I qua M*

$\Rightarrow I'\left(\frac{8}{5};\frac{-6}{5}\right) \Rightarrow$ *(C′):* $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y+\frac{6}{5}\right)^2=9$

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C′) tâm M(5; 1) biết (C′) cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

• *(C) có tâm I(1; –2), bán kính* $R=\sqrt{3}$. *PT đường thẳng IM:* $3x-4y-11=0$. $AB=\sqrt{3}$.

Gọi $H(x;y)$ *là trung điểm của AB. Ta có:* $\begin{cases} H\in IM \\ IH=\sqrt{R^2-AH^2}=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y-11=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=\frac{9}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{5};y=-\frac{29}{10} \\ x=\frac{11}{5};y=-\frac{11}{10} \end{array}\right. \Rightarrow H\left(-\frac{1}{5};-\frac{29}{10}\right)$ *hoặc* $H\left(\frac{11}{5};-\frac{11}{10}\right)$.

• *Với* $H\left(-\frac{1}{5};-\frac{29}{10}\right)$. *Ta có* $R'^2=MH^2+AH^2=43 \Rightarrow$ *PT (C′):* $(x-5)^2+(y-1)^2=43$.

• *Với* $H\left(\frac{11}{5};-\frac{11}{10}\right)$. *Ta có* $R'^2=MH^2+AH^2=13 \Rightarrow$ *PT (C′):* $(x-5)^2+(y-1)^2=13$.

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và điểm $K(3;4)$. Lập phương trình đường tròn (T) có tâm K, cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất, với I là tâm của đường tròn (C).

• *(C) có tâm* $I(1;2)$, *bán kính* $R=2$. $S_{\Delta IAB}$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *ΔIAB vuông tại I* $\Leftrightarrow AB=2\sqrt{2}$.

Mà $IK=2\sqrt{2}$ *nên có hai đường tròn thoả YCBT.*

\+ (T_1) *có bán kính* $R_1=R=2 \Rightarrow (T_1):(x-3)^2+(y-4)^2=4$

+ (T_2) *có bán kính* $R_2 = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow (T_1): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 20$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các đỉnh: A(–2;3), $B\left(\frac{1}{4};0\right)$, $C(2;0)$.

• *Điểm D(d;0)* $\left(\frac{1}{4} < d < 2\right)$ *thuộc đoạn BC là chân đường phân giác trong của góc A*

khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{d-\frac{1}{4}}{2-d} = \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \Rightarrow 4d - 1 = 6 - 3d \Rightarrow d = 1.$

Phương trình AD: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$; *AC:* $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-3} \Leftrightarrow 3x + 4y - 6 = 0$

Giả sử tâm I của đường tròn nội tiếp có tung độ là b. Khi đó hoành độ là $1-b$ *và bán kính cũng bằng b. Vì khoảng cách từ I tới AC cũng phải bằng b nên ta có:*

$$\frac{\left|3(1-b) + 4b - 6\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = b \Leftrightarrow |b-3| = 5b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b-3 = 5b \Rightarrow b = -\frac{4}{3} \\ b-3 = -5b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Rõ ràng chỉ có giá trị $b = \frac{1}{2}$ *là hợp lý.*

Vậy, phương trình của đường tròn nội tiếp ΔABC là: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Câu 15. Trong mặt phẳng toạ độ O*xy*, cho hai đường thẳng (d_1): $4x - 3y - 12 = 0$ và (d_2): $4x + 3y - 12 = 0$. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên (d_1), (d_2) và trục O*y*.

• *Gọi* $A = d_1 \cap d_2, B = d_1 \cap Oy, C = d_2 \cap Oy \Rightarrow A(3;0), B(0;-4), C(0;4) \Rightarrow$ *ΔABC cân đỉnh A và AO là phân giác trong của góc A. Gọi I, R là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC*

$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3};0\right), R = \frac{4}{3}$.

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường thẳng *d*: $x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn có phương trình: (C_1): $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$, (C_2): $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc *d* và tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2).

• *Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của (C), (C_1), (C_2). Giả sử* $I(a;a-1) \in d$.
(C) tiếp xúc ngoài với (C_1), (C_2) nên $II_1 = R + R_1$, $II_2 = R + R_2 \Rightarrow II_1 - R_1 = II_2 - R_2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (a+3)^2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{(a-5)^2 + (a+5)^2} - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow I(0; -1), R = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ *Phương trình (C):* $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC với A(3; –7), B(9; –5), C(–5; 9), M(–2; –7). Viết phương trình đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

• *y + 7 = 0; 4x + 3y + 27 = 0.*

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết góc giữa tiếp tuyến này và trục tung bằng 30°.

• $(C):(x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow I(-1;0); R=1$. *Hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) cần tìm là* $\pm\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ *PT (Δ) có dạng* $\Delta_1: \sqrt{3}x-y+b=0$ *hoặc* $\Delta_2: \sqrt{3}x+y+b=0$

+ $\Delta_1: \sqrt{3}x-y+b=0$ *tiếp xúc (C)* $\Leftrightarrow d(I,\Delta_1)=R \Leftrightarrow \dfrac{|b-\sqrt{3}|}{2}=1 \Leftrightarrow b=\pm2+\sqrt{3}$.

Kết luận: $(\Delta_1): \sqrt{3}x-y\pm2+\sqrt{3}=0$

+ $(\Delta_2): \sqrt{3}x+y+b=0$ *tiếp xúc (C)* $\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=R \Leftrightarrow \dfrac{|b-\sqrt{3}|}{2}=1 \Leftrightarrow b=\pm2+\sqrt{3}$.

Kết luận: $(\Delta_2): \sqrt{3}x+y\pm2+\sqrt{3}=0$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ và đường thẳng (d): $3x+y-3=0$. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C), biết tiếp tuyến không đi qua gốc toạ độ và hợp với đường thẳng (d) một góc 45^0.

• *(C) có tâm I(3; 1), bán kính R =* $\sqrt{5}$. *Giả sử (Δ):* $ax+by+c=0\ (c\neq0)$.

Từ: $\begin{cases} d(I,\Delta)=\sqrt{5} \\ \cos(d,\Delta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2,b=-1,c=-10 \\ a=1,b=2,c=-10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta: 2x-y-10=0 \\ \Delta: x+2y-10=0 \end{array}\right.$.

Câu 20. Trong hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=10$ và đường thẳng $d: 2x-y-2=0$. Lập phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 45^0.

• *(C) có tâm* $I(1;1)$ *bán kính* $R=\sqrt{10}$. *Gọi* $\vec{n}=(a;b)$ *là VTPT của tiếp tuyến* Δ $(a^2+b^2\neq0)$,

Vì $(\Delta,d)=45^0$ *nên* $\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ b=-3a \end{array}\right.$

• *Với* $a=3b \Rightarrow$ *Δ:* $3x+y+c=0$. *Mặt khác* $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|4+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \\ c=-14 \end{array}\right.$

• *Với* $b=-3a \Rightarrow$ *Δ:* $x-3y+c=0$. *Mặt khác* $d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|-2+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-8 \\ c=12 \end{array}\right.$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm: $3x+y+6=0; 3x+y-14=0$; $x-3y-8=0; x-3y+12=0$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1): $x^2+y^2-2x-2y-2=0$, (C_2): $x^2+y^2-8x-2y+16=0$.

• *(C_1) có tâm* $I_1(1;1)$, *bán kính* $R_1 = 2$; *(C_2) có tâm* $I_2(4;1)$, *bán kính* $R_2 = 1$.

Ta có: $I_1I_2=3=R_1+R_2$ $\Rightarrow$ *(C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau tại A(3; 1)*

$\Rightarrow$ *(C_1) và (C_2) có 3 tiếp tuyến, trong đó có 1 tiếp tuyến chung trong tại A là x = 3 // Oy.*

* *Xét 2 tiếp tuyến chung ngoài:* $(\Delta): y=ax+b \Leftrightarrow (\Delta): ax-y+b=0$ *ta có:*

$$\begin{cases} d(I_1;\Delta)=R_1 \\ d(I_2;\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \\ \dfrac{|4a+b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ b=\dfrac{4-7\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ b=\dfrac{4+7\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Vậy, có 3 tiếp tuyến chung: $(\Delta_1): x=3,\ (\Delta_2): y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{4+7\sqrt{2}}{4},\ (\Delta_3)\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{4-7\sqrt{2}}{4}$

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn *(C)*: $(x-2)^2+(y-3)^2=2$ và *(C')*: $(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của *(C)* và *(C')*.

• *(C) có tâm I(2; 3) và bán kính* $R=\sqrt{2}$ *; (C') có tâm I'(1; 2) và bán kính* $R'=2\sqrt{2}$.

Ta có: $II'=\sqrt{2}=|R-R'| \Rightarrow$ *(C) và (C') tiếp xúc trong* $\Rightarrow$ *Tọa độ tiếp điểm M(3; 4).*

Vì (C) và (C') tiếp xúc trong nên chúng có duy nhất một tiếp tuyến chung là đường thẳng qua điểm M(3; 4), có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{II'}=(-1;-1) \Rightarrow$ *PTTT:* $x+y-7=0$

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2y-3=0$ và $(C_2): x^2+y^2-8x-8y+28=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

• (C_1) *có tâm* $I_1(0;1)$, *bán kính* $R_1=2$; (C_2) *có tâm* $I_2(4;4)$, *bán kính* $R_2=2$.

Ta có: $I_1I_2=5>4=R_1+R_2 \Rightarrow (C_1),(C_2)$ *ngoài nhau. Xét hai trường hợp:*

+ Nếu d // Oy thì phương trình của d có dạng: $x+c=0$.

Khi đó: $d(I_1,d)=d(I_2,d) \Leftrightarrow |c|=|4+c| \Leftrightarrow c=-2 \Rightarrow d: x-2=0$.

+ Nếu d không song song với Oy thì phương trình của d có dạng: $d: y=ax+b$.

Khi đó: $\begin{cases} d(I_1,d)=2 \\ d(I_1,d)=d(I_2,d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \\ \dfrac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a-4+b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{4};\ b=\dfrac{7}{2} \\ a=\dfrac{3}{4};\ b=-\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{7}{24};\ b=\dfrac{37}{12} \end{array}\right.$

$\Rightarrow d: 3x-4y+14=0$ *hoặc* $d: 3x-4y-6=0$ *hoặc* $d: 7x+24y-74=0$.

Vậy: $d: x-2=0$; $d: 3x-4y+14=0$; $d: 3x-4y-6=0$; $d: 7x+24y-74=0$.

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

• (C_1) *có tâm* $I_1(0;1)$, *bán kính* $R_1=3$; (C_2) *có tâm* $I_2(3;-4)$, *bán kính* $R_2=3$.

Giả sử tiếp tuyến chung Δ của $(C_1), (C_2)$ *có phương trình:* $ax+by+c=0\ (a^2+b^2\neq 0)$.

Δ là tiếp tuyến chung của $(C_1), (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ |3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $a=2b$ *hoặc* $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$.

+ TH1: Với $a=2b$. *Chọn* $b=1 \Rightarrow a=2, c=-2\pm 3\sqrt{5} \Rightarrow \Delta: 2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

+ *TH2: Với* $c = \frac{-3a+2b}{2}$. *Thay vào (1) ta được:* $|a-2b| = 2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\frac{4}{3}b \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \Delta: y+2=0$ *hoặc* $\Delta: 4x-3y-9=0$.

Câu 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$. Tia Oy cắt (C) tại điểm A. Lập phương trình đường tròn (T) có bán kính R′ = 2 sao cho (T) tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

• *(C) có tâm* $I(-2\sqrt{3};0)$, *bán kính* $R=4$. *Tia Oy cắt (C) tại* $A(0;2)$. *Gọi J là tâm của (T).*

Phương trình IA: $\begin{cases} x=2\sqrt{3}t \\ y=2t+2 \end{cases}$. *Giả sử* $J(2\sqrt{3}t;2t+2)\in(IA)$.

(T) tiếp xúc ngoài với (C) tại A nên $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{JA} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow J(\sqrt{3};3)$.

Vậy: $(T): (x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2=4$.

Câu 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=1$ và phương trình: $x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$ (1). Chứng minh rằng phương trình (1) là phương trình của đường tròn với mọi *m*. Gọi các đường tròn tương ứng là (C_m). Tìm *m* để (C_m) tiếp xúc với (C).

• *(C_m) có tâm* $I(m+1;-2m)$, *bán kính* $R'=\sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}$,

(C) có tâm O(0; 0) bán kính R = 1, $OI = \sqrt{(m+1)^2+4m^2}$, *ta có OI < R′*

Vậy (C) và (C_m) chỉ tiếp xúc trong. $\Rightarrow$ *R′ – R = OI (vì R′ > R)* $\Rightarrow m=-1; m=\frac{3}{5}$.

Câu 27. Trong mặt phẳng Oxy, cho các đường tròn có phương trình $(C_1): (x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$ và $(C_2): (x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng *d* tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.

• (C_1) *có tâm* $I_1(1;0)$, *bán kính* $R_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; (C_2) *có tâm* $I_1(2;2)$, *bán kính* $R_2=2$. *Gọi H là trung điểm của MN* $\Rightarrow d(I_2,d)=I_2H=\sqrt{R_2^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng d có dạng: $ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$.

Ta có: $\begin{cases} d(I_1,d)=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ d(I_2,d)=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}|a+c|=\sqrt{a^2+b^2} \\ |2a+2b+c|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$. *Giải hệ tìm được a, b, c.*

Vậy: $d: x+y-2=0$; $d: x+7y-6=0$; $d: x-y-2=0$; $d: 7x-y-2=0$

Câu 28. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x+5=0$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến của (C) mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^0.

• (C) có tâm I(3;0) và bán kính R = 2. Gọi M(0; m) ∈ Oy

Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB ⇒ $\left[\begin{array}{l} AMB = 60^0 \quad (1) \\ AMB = 120^0 \; (2) \end{array}\right.$

Vì MI là phân giác của AMB nên:

(1) ⇔ $AMI = 30^0 \Leftrightarrow MI = \dfrac{IA}{\sin 30^0}$ ⇔ MI = 2R ⇔ $\sqrt{m^2+9} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$

(2) ⇔ $AMI = 60^0 \Leftrightarrow MI = \dfrac{IA}{\sin 60^0}$ ⇔ MI = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$R ⇔ $\sqrt{m^2+9} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ Vô nghiệm Vậy có hai điểm $M_1(0;\sqrt{7})$ và $M_2(0;-\sqrt{7})$

Câu 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng Δ định bởi: $(C): x^2+y^2-4x-2y=0;\ \Delta: x+2y-12=0$. Tìm điểm M trên Δ sao cho từ M vẽ được với (C) hai tiếp tuyến lập với nhau một góc 60^0.

• *Đường tròn (C) có tâm I(2;1) và bán kính* $R=\sqrt{5}$.

Gọi A, B là hai tiếp điểm. Nếu hai tiếp tuyến này lập với nhau một góc 60^0 thì IAM là nửa tam giác đều suy ra $IM = 2R = 2\sqrt{5}$.

Như thế điểm M nằm trên đường tròn (T) có phương trình: $(x-2)^2+(y-1)^2=20$.

Mặt khác, điểm M nằm trên đường thẳng Δ, nên tọa độ của M nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=20 & (1)\\ x+2y-12=0 & (2)\end{cases}$$

Khử x giữa (1) và (2) ta được: $(-2y+10)^2+(y-1)^2=20 \Leftrightarrow 5y^2-42y+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\dfrac{27}{5}\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là: $M(6;3)$ *hoặc* $M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{27}{5}\right)$

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm *m* để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

• *(C) có tâm I(1; –2), R = 3. ABIC là hình vuông cạnh bằng 3* $\Rightarrow IA = 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|m-1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |m-1| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=7\end{array}\right.$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $(C): x^2+y^2=1,\ d: x-y+m=0$ *ĐS:* $m=\pm 2$.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm *m* để trên *d* có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới đường tròn (C) (A, B là hai tiếp điểm) sao cho PAB là tam giác đều.

• *(C) có tâm* $I(1;-2)$*, bán kính* $R=3$. ΔPAB *đều* $\Rightarrow PI = 2AI = 2R = 6 \Rightarrow$ *P nằm trên đường tròn (T) có tâm I, bán kính* $r=6$. *Do trên d có duy nhất một điểm P thoả YCBT nên d là tiếp*

tuyến của (T) $\Rightarrow d(I,d)=6 \Leftrightarrow \frac{|11+m|}{5}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=19 \\ m=-41 \end{array}\right.$.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ và $(C'): x^2+y^2=9$. Từ điểm M thuộc đường tròn (C) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C′), gọi A, B là các tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài đoạn AB bằng $4,8$.

• *(C') có tâm* $O(0;0)$, *bán kính* $R=OA=3$. *Gọi* $H=AB\cap OM \Rightarrow$ *H là trung điểm của AB*

$\Rightarrow AH=\frac{12}{5}$. *Suy ra:* $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\frac{9}{5}$ *và* $OM=\frac{OA^2}{OH}=5$.

Giả sử $M(x;y)$. *Ta có:* $\begin{cases} M\in(C) \\ OM=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-18x-6y+65=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy $M(4;3)$ *hoặc* $M(5;0)$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. M là điểm di động trên đường thẳng $d: y=x+1$. Chứng minh rằng từ M kẻ được hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (C) (T_1, T_2 là tiếp điểm) và tìm toạ độ điểm M, biết đường thẳng T_1T_2 đi qua điểm $A(1;-1)$.

• *(C) có tâm* $I(1;-2)$, *bán kính* $R=2$. *Giả sử* $M(x_0;x_0+1)\in d$.

$IM=\sqrt{(x_0-1)^2+(x_0+3)^2}=\sqrt{2(x_0+1)^2+8}>2=R \Rightarrow$ *M nằm ngoài (C)* $\Rightarrow$ *qua M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C).*

Gọi J là trung điểm IM $\Rightarrow J\left(\frac{x_0+1}{2};\frac{x_0-1}{2}\right)$. *Đường tròn (T) đường kính IM có tâm J bán kính* $R_1=\frac{IM}{2}$ *có phương trình* $(T): \left(x-\frac{x_0+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{x_0-1}{2}\right)^2=\frac{(x_0-1)^2+(x_0+3)^2}{4}$

Từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MT_1, MT_2 *đến (C)* $\Rightarrow \widehat{IT_1M}=\widehat{IT_2M}=90^0 \Rightarrow T_1,T_2\in(T)$

$\Rightarrow \{T_1,T_2\}=(C)\cap(T) \Rightarrow$ *toạ độ* T_1, T_2 *thoả mãn hệ:*

$\begin{cases} (x-\frac{x_0+1}{2})^2+(y-\frac{x_0-1}{2})^2=\frac{(x_0-1)^2+(x_0+3)^2}{4} \\ (x-1)^2+(y+2)^2=4 \end{cases} \Rightarrow (1-x_0)x-(3+x_0)y-x_0-3=0 \quad (1)$

Toạ độ các điểm T_1, T_2 *thoả mãn (1), mà qua 2 điểm phân biệt xác định duy nhất 1 đường thẳng nên phương trình* T_1T_2 *là* $x(1-x_0)-y(3+x_0)-x_0-3=0$.

$A(1;-1)$ *nằm trên* T_1T_2 *nên* $1-x_0+(3+x_0)-x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=1 \Rightarrow M(1;2)$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ và điểm M(7; 3). Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho MA = 3MB.

• $P_{M/(C)}=27>0 \Rightarrow$ *M nằm ngoài (C). (C) có tâm I(1;–1) và R = 5.*

Mặt khác:

$P_{M/(C)}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=3MB^2 \Rightarrow MB=3 \Rightarrow BH=3 \Rightarrow IH=\sqrt{R^2-BH^2}=4=d[M,(d)]$

Ta có: pt(d): a(x – 7) + b(y – 3) = 0 ($a^2 + b^2 > 0$).

$d[M,(d)] = 4 \Leftrightarrow \frac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\frac{12}{5}b \end{array}\right.$. *Vậy (d): y – 3 = 0 hoặc (d): 12x – 5y – 69 = 0.*

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, lập phương trình đường thẳng *d* đi qua điểm A(1; 2) và cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ theo một dây cung có độ dài bằng $l=8$.

• *d: a(x – 1)+ b(y –2) = 0 ⇔ ax + by – a – 2b = 0 ($a^2 + b^2 > 0$)*
Vì d cắt (C) theo dây cung có độ dài $l=8$ nên khoảng cách từ tâm I(2; –1) của (C) đến d bằng 3.

$$d(I,d) = \left|\frac{2a-b-a-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = 3 \Leftrightarrow |a-3b| = 3\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 8a^2+6ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\frac{3}{4}b \end{array}\right.$$

• *a = 0: chọn b = 1 ⇒ d: y – 2 = 0* • *a = $-\frac{3}{4}b$: chọn a = 3, b = – 4 ⇒ d: 3x – 4 y + 5 = 0.*

Câu hỏi tương tự:

a) d đi qua O, $(C): x^2+y^2-2x+6y-15=0$, $l=8$. *ĐS:* $d: 3x-4y=0$; $d: y=0$.

b) d đi qua $Q(5;2)$, $(C): x^2+y^2-4x-8y-5=0$, $l=5\sqrt{2}$.
ĐS: $d: x-y-3=0$; $d: 17x-7y-71=0$.

c) d đi qua $A(9;6)$, $(C): x^2+y^2-8x-2y=0$, $l=4\sqrt{3}$.
ĐS: $d: y=2x-12$; $d: y=-\frac{1}{2}x+\frac{21}{2}$

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ O*xy*, cho đường tròn (C) : $x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x+y-2=0$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài $l=6$.

• *(C) có tâm I(–1; 4), bán kính R = 5. PT đường thẳng Δ có dạng:* $3x+y+c=0,\ c \neq 2$.
Vì Δ cắt (C) theo một dây cung có độ dài bằng 6 nên:

$$\Rightarrow d(I,\Delta) = \frac{|-3+4+c|}{\sqrt{3^2+1}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=4\sqrt{10}-1 \\ c=-4\sqrt{10}-1 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình Δ cần tìm là: $3x+y+4\sqrt{10}-1=0$ *hoặc* $3x+y-4\sqrt{10}-1=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) $(C): (x-3)^2+(y-1)^2=3$, $d: 3x-4y+2012=0$, $l=2\sqrt{5}$.
ĐS: $\Delta: 3x-4y+5=0$; $\Delta: 3x-4y-15=0$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ O*xy*, cho đường tròn $(C): (x+4)^2+(y-3)^2=25$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+10=0$. Lập phương trình đường thẳng *d* biết $d \perp (\Delta)$ và *d* cắt (*C*) tại *A*, *B* sao cho *AB* = 6.

• *(C) có tâm I(– 4; 3) và có bán kính R = 5. Gọi H là trung điểm AB, AH = 3. Do $d \perp \Delta$ nên PT của d có dạng:* $4x+3y+m=0$.

Ta có: $d(I,(\Delta_1)) = IH = \sqrt{AI^2-AH^2} = \sqrt{5^2-3^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{|-16+9+m|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=27 \\ m=-13 \end{array}\right.$

Vậy PT các đường thẳng cần tìm là: $4x+3y+27=0$ *và* $4x+3y-13=0$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2y-3=0$ và điểm M(0; 2). Viết phương trình đường thẳng *d* qua M và cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài ngắn nhất.

• *(C) có tâm I(1; 1) và bán kính R =* $\sqrt{5}$. *IM =* $\sqrt{2}<\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ *M nằm trong đường tròn (C).*
Giả sử d là đường thẳng qua M và H là hình chiếu của I trên d.
Ta có: AB = 2AH = $2\sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{5-IH^2}\geq 2\sqrt{5-IM^2}=2\sqrt{3}$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H\equiv M$ *hay* $d\perp IM$. *Vậy d là đường thẳng qua M và có VTPT* $\overrightarrow{MI}=(1;-1)$
$\Rightarrow$ *Phương trình d:* $x-y+2=0$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với (C): $x^2+y^2-8x-4y-16=0$, *M*(–1; 0). *ĐS:* $d: 5x+2y+5=0$

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có tâm O, bán kính R = 5 và điểm M(2; 6). Viết phương trình đường thẳng *d* qua M, cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho ΔOAB có diện tích lớn nhất.

• *Tam giác OAB có diện tích lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *ΔOAB vuông cân tại O. Khi đó* $d(O,d)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử phương trình đường thẳng d: $A(x-2)+B(y-6)=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$

$$d(O,d)=\frac{5\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|-2A-6B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 47B^2+48AB-17A^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B=\frac{-24-5\sqrt{55}}{47}A\\ B=\frac{-24+5\sqrt{55}}{47}A\end{array}\right.$$

\+ *Với* $B=\frac{-24-5\sqrt{55}}{47}A$: *chọn A = 47* $\Rightarrow$ *B =* $-24-5\sqrt{55}$

$\Rightarrow$ *d:* $47(x-2)-\left(24+5\sqrt{55}\right)(y-6)=0$

\+ *Với* $B=\frac{-24+5\sqrt{55}}{47}A$: *chọn A = 47* $\Rightarrow$ *B =* $-24+5\sqrt{55}$

$\Rightarrow$ *d:* $47(x-2)+\left(-24+5\sqrt{55}\right)(y-6)=0$

Câu hỏi tương tự:

a) $(C): x^2+y^2+4x-6y+9=0$, $M(1;-8)$. *ĐS:* $7x+y+1=0$; $17x+7y+39=0$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (*C*): $x^2+y^2-6x+2y-6=0$ và điểm $A(3;3)$. Lập phương trình đường thẳng *d* qua *A* và cắt (C) tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng độ dài cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (*C*).

• *(C) có tâm I(3; –1), R = 4. Ta có: A(3 ;3)* $\in$ *(C).*
PT đường thẳng d có dạng: $a(x-3)+b(y-3)=0,\ a^2+b^2\neq 0\Leftrightarrow ax+by-3a-3b=0$.
Giả sử d qua A cắt (C) tại hai điểm A, B $\Rightarrow$ *AB =* $4\sqrt{2}$. *Gọi I là tâm hình vuông.*
Ta có: $d(I,d)=2\sqrt{2}\ (=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB)\Leftrightarrow\frac{|3a-b-3a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |4b| = 2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$. *Chọn b = 1 thì a = 1 hoặc a = –1.*

Vậy phương trình các đường thẳng cần tìm là: $x+y-6=0$ *hoặc* $x-y=0$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho hai đường tròn (C_1): $x^2+y^2=13$ và (C_2): $(x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là một giao điểm của (C_1) và (C_2) với $y_A > 0$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

• *(C_1) có tâm O(0; 0), bán kính $R_1 = \sqrt{13}$. (C_2) có tâm I_2(6; 0), bán kính R_2 = 5. Giao điểm A(2; 3). Giả sử d:* $a(x-2)+b(y-3)=0$ $(a^2+b^2 \neq 0)$. *Gọi* $d_1 = d(O,d),\ d_2 = d(I_2,d)$.

Từ giả thiết $\Rightarrow R_1^2 - d_1^2 = R_2^2 - d_2^2 \Leftrightarrow d_2^2 - d_1^2 = 12 \Leftrightarrow \dfrac{(6a-2a-3b)^2}{a^2+b^2} - \dfrac{(-2a-3b)^2}{a^2+b^2} = 12$

$$\Leftrightarrow b^2+3ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-3a \end{array}\right.$$

• *Với b = 0: Chọn a = 1* $\Rightarrow$ *Phương trình d:* $x-2=0$.

• *Với b = –3a: Chọn a = 1, b = –3* $\Rightarrow$ *Phương trình d:* $x-3y+7=0$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ O*xy*, cho đường thẳng Δ: $mx+4y=0$, đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ có tâm I. Tìm *m* để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12.

• *(C) có tâm* $I(1;m)$, *bán kính R = 5. Gọi H là trung điểm của dây cung AB.*

$$IH = d(I,\Delta) = \frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}};\ AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2+16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2+16}}$$

$$S_{\Delta IAB} = 12 \Leftrightarrow d(I,\Delta).AH = 12 \Leftrightarrow 3m^2 - 25|m| + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 3 \\ m = \pm\dfrac{16}{3} \end{array}\right.$$

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$, đường thẳng $(d): x+y+m=0$. Tìm *m* để (C) cắt (d) tại A và B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.

• *(C) có tâm O(0; 0) , bán kính R = 1. (d) cắt (C) tại A, B* $\Leftrightarrow d(O;d) < 1$

Khi đó: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB.\sin AOB = \frac{1}{2}.\sin AOB \le \frac{1}{2}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow AOB = 90^0$.

Vậy S_{AOB} *lớn nhất* $\Leftrightarrow AOB = 90^0$. *Khi đó* $d(I;d) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho đường thẳng (d): $\sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$ và đường tròn có phương trình $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Tìm *m* sao cho (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Với giá trị nào của *m* thì diện tích tam giác IAB lớn nhất và tính giá trị đó.

• (C) *có tâm I (1; –2) và bán kính R = 3.*

(d) cắt (C) *tại 2 điểm phân biệt A, B* $\Leftrightarrow d(I,d) < R \Leftrightarrow |\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}| < 3\sqrt{2+m^2}$

$\Leftrightarrow 1-4m+4m^2 < 18+9m^2 \Leftrightarrow 5m^2+4m+17>0 \Leftrightarrow m \in R$

Ta có: $S_{IAB} = \frac{1}{2}IA.IB\sin AIB \le \frac{1}{2}IA.IB = \frac{9}{2}$

Vậy: S_{IAB} *lớn nhất là* $\frac{9}{2}$ *khi* $AIB = 90^0 \Leftrightarrow AB = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow d(I,d) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow |1-2m| = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+m^2} \Leftrightarrow 2m^2+16m+32=0 \Leftrightarrow m=-4$

Câu hỏi tương tự:

a) *Với* $d: x+my-2m+3=0$, $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$. *ĐS:* $m=0 \vee m=\frac{8}{15}$

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-6y+9=0$ và điểm $M(1;-8)$. Viết phương trình đường thẳng *d* đi qua M, cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác ABI có diện tích lớn nhất, với I là tâm của đường tròn (C).

• *(C) có tâm* $I(-2;3)$, *bán kính* $R=2$.

PT đường thẳng d qua $M(1;-8)$ *có dạng:* $d: ax+by-a+8b=0$ $(a^2+b^2 \ne 0)$.

$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB = 2\sin AIB$.

Do đó: $S_{\Delta IAB}$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow AIB = 90^0 \Leftrightarrow d(I,d) = IA\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|11b-3a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 7a^2-66ab+118b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7b \\ 7a=17b \end{array}\right.$.

+ *Với* $b=1 \Rightarrow a=7 \Rightarrow d: 7x+y+1=0$ + *Với* $b=7 \Rightarrow a=17 \Rightarrow d: 17x+7y+39=0$

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng Δ: $x+my-2m+3=0$ với *m* là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm *m* để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho diện tích ΔIAB lớn nhất.

• *(C) có tâm là I (–2; –2); R =* $\sqrt{2}$. *Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.*

Kẻ đường cao IH của ΔIAB, ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB = \sin AIB$

Do đó S_{IAB} *lớn nhất* $\Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow$ *ΔAIB vuông tại I* $\Leftrightarrow IH = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1$ *(thỏa IH < R)*

$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 15m^2-8m=0 \Leftrightarrow m=0$ *hay* $m=\frac{8}{15}$

Câu hỏi tương tự:

a) *Với* $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$, $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$. *ĐS:* $m=-4$.

b) *Với* $(C): x^2+y^2-2x-4y-5=0$, $\Delta: x+my-2=0$. *ĐS:* $m=-2$

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x-5y-2=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d (cho biết điểm A có hoành độ dương). Tìm tọa độ C thuộc đường tròn (C) sao cho

tam giác ABC vuông ở B.

• *Tọa độ giao điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình*

$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-8=0 \\ x-5y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; x=2 \\ y=-1; x=-3 \end{cases}$. *Vì* $x_A > 0$ *nên ta được A(2;0), B(–3;–1).*

Vì $ABC = 90^0$ *nên AC là đường kính đường tròn, tức điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I của đường tròn. Tâm I(–1;2), suy ra C(–4;4).*

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng (Δ): $2x-3y-1=0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm toạ độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

• *(C) có tâm I(–1; 2), bán kính R =* $\sqrt{13}$. $d(I,\Delta)=\dfrac{9}{\sqrt{13}}<R \Rightarrow$ *đường thẳng (Δ) cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt. Gọi M là điểm nằm trên (C), ta có* $S_{\Delta ABM}=\dfrac{1}{2}AB.d(M,\Delta)$. *Trong đó AB không đổi nên* $S_{\Delta ABM}$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow d(M,\Delta)$ *lớn nhất.*

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với (Δ). PT đường thẳng d là $3x+2y-1=0$.

Gọi P, Q là giao điểm của đường thẳng d vời đường tròn (C). Toạ độ P, Q là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-8=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-1 \\ x=-3, y=5 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ *P(1; –1); Q(–3; 5)*

Ta có $d(P,\Delta)=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $d(Q,\Delta)=\dfrac{22}{\sqrt{13}}$. *Như vậy* $d(M,\Delta)$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *M trùng với Q.*

Vậy tọa độ điểm M(–3; 5).

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ và A(0; –1) ∈ (C). Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc đường tròn (C) sao cho ΔABC đều.

• *(C) có tâm I(1;2) và R=* $\sqrt{10}$. *Gọi H là trung điểm BC. Suy ra* $\overrightarrow{AI}=2.\overrightarrow{IH} \Leftrightarrow H\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right)$

ΔABC *đều* $\Rightarrow$ *I là trọng tâm. Phương trình (BC):* $x+3y-12=0$

Vì B, C ∈ (C) nên tọa độ của B, C là các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-5=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-5=0 \\ x=12-3y \end{cases}$$

Giải hệ PT trên ta được: $B\left(\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$ *hoặc ngược lại.*

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy,* cho đường tròn (C): $(x-3)^2+(y-4)^2=35$ và điểm A(5; 5). Tìm trên (C) hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

• *(C) có tâm I(3; 4). Ta có:* $\begin{cases} AB=AC \\ IB=IC \end{cases} \Rightarrow$ *AI là đường trung trực của BC. ΔABC vuông cân tại A nên AI cũng là phân giác của* BAC. *Do đó AB và AC hợp với AI một góc* 45^0.

Gọi d là đường thẳng qua A và hợp với AI một góc 45^0. *Khi đó B, C là giao điểm của d với (C) và AB = AC. Vì* $\overrightarrow{IA}=(2;1)$ *≠ (1; 1), (1; –1) nên d không cùng phương với các trục toạ độ* $\Rightarrow$ *VTCP của d có hai thành phần đều khác 0. Gọi* $\vec{u}=(1;a)$ *là VTCP của d. Ta có:*

$$\cos\left(\overrightarrow{IA},\vec{u}\right)=\frac{|2+a|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{2^2+1}}=\frac{|2+a|}{\sqrt{5}\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}|2+a|=\sqrt{5}\sqrt{1+a^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

+ Với a = 3, thì $\vec{u}=(1;3)$ $\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\begin{cases}x=5+t\\y=5+3t\end{cases}$.

Ta tìm được các giao điểm của d và (C) là: $\left(\frac{9+\sqrt{13}}{2};\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right),\left(\frac{9-\sqrt{13}}{2};\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$

+ Với a = $-\frac{1}{3}$*, thì* $\vec{u}=\left(1;-\frac{1}{3}\right)$ $\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d:* $\begin{cases}x=5+t\\y=5-\frac{1}{3}t\end{cases}$.

Ta tìm được các giao điểm của d và (C) là: $\left(\frac{7+3\sqrt{13}}{2};\frac{11-\sqrt{13}}{2}\right),\left(\frac{7-3\sqrt{13}}{2};\frac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

+Vì AB = AC nên ta có hai cặp điểm cần tìm là: $\left(\frac{7+3\sqrt{13}}{2};\frac{11-\sqrt{13}}{2}\right),\left(\frac{9+\sqrt{13}}{2};\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right)$

và $\left(\frac{7-3\sqrt{13}}{2};\frac{11+\sqrt{13}}{2}\right),\left(\frac{9-\sqrt{13}}{2};\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right)$

Câu 51. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=4$ và các điểm $A\left(1;-\frac{8}{3}\right)$, $B(3;0)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\frac{20}{3}$.

• $AB=\sqrt{4+\frac{64}{9}}=\frac{10}{3}$; $AB: 4x-3y-12=0$. Gọi M(*x;y*) và $h=d(M,AB)$.

Ta có: $\frac{1}{2}h.AB=\frac{20}{3}\Leftrightarrow h=4\Leftrightarrow\frac{|4x-3y-12|}{5}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-3y+8=0\\4x-3y-32=0\end{array}\right.$

+ $\begin{cases}4x-3y+8=0\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow M(-2;0);M\left(-\frac{14}{25};\frac{48}{75}\right)$ + $\begin{cases}4x-3y-32=0\\x^2+y^2=4\end{cases}$ (vô nghiệm)

Câu 52. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-6y+9=0$ và đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$. Tìm những điểm M ∈ (C) và N ∈ *d* sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

• *(C) có tâm* $I(-1;3)$*, bán kính* $R=1$ $\Rightarrow d(I,d)=2>R$ $\Rightarrow d\cap(C)=\varnothing$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với d $\Rightarrow(\Delta): 4x+3y-5=0$.

Gọi $N_0=d\cap\Delta\Rightarrow N_0\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Gọi M_1,M_2 *là các giao điểm của Δ và (C)* $\Rightarrow M_1\left(-\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right),M_2\left(-\frac{8}{5};\frac{19}{5}\right)$

$\Rightarrow$ *MN ngắn nhất khi* $M\equiv M_1,N\equiv N_0$.

Vậy các điểm cần tìm: $M\left(-\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)\in(C)$, $N\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)\in d$.